Contents

1. El plano complejo

La solución de ecuaciones algebraicas cuadráticas o cúbicas nos lleva a menudo a encontrarnos con la necesidad de calcular la raíz cuadrada de un número negativo,

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{-1} \ , \tag{1.1}$$

algo que fue apreciado ya a mediados del siglo XVI por el matemático italiano Gerolamo Cardano. En el cuerpo de los números reales no es posible darle sentido a (1.1). El presente curso nos va a mostrar lo fructífero que resulta el capricho de rebelarse a este resultado y establecer, por decreto, que (1.1) tiene sentido. No puede dejar de mencionarse la maravillosa sorpresa que nos depararía el siglo XX cuando, al investigarse las leyes que rigen el universo atómico y subatómico, se encontró que la matemática resultante de este acto de rebeldía es crucial para poder escribir la ecuación de Schrödinger y formular la Mecánica Cuántica.

1.1 El cuerpo de los números complejos

Consideremos el plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ y denotemos (x, y) al par ordenado de números reales que representan las coordenadas de un punto cualquiera. Definamos las siguientes operaciones entre dos puntos arbitrarios de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \ , \tag{1.2}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \ , \tag{1.3}$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \ , \lambda \in \mathbb{R} \ , \tag{1.4}$$

a las que denominaremos, respectivamente, *suma*, *producto* y *producto por un escalar real*. De las definiciones (1.2) y (1.4) se sigue que

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) \ , \tag{1.5}$$

al tiempo que también se verifica que

$$(1,0)\cdot(1,0) = (1,0) \ , \qquad \text{y} \qquad (0,1)\cdot(0,1) = -(1,0) \ . \tag{1.6}$$

Los pares de la forma $(x,0)$ son isomorfos a los números reales

$$(x,0) = x(1,0) \leftrightarrow x \ ,$$

ya que se comportan igual que estos frente a la suma y el poducto

$$(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2, 0) \ , \qquad \text{y} \qquad (x_1,0)\cdot(x_2,0) = (x_1 \cdot x_2, 0) \ .$$

El número 1 es la identidad del producto, $(1,0)$. Si llamamos $i = (0,1)$, vemos que

$$i^2 = -1 \ . \tag{1.7}$$

Todo punto del plano, según (1.5), puede escribirse como

$$(x,y) = x + iy \ .$$

Se suele utilizar la letra z para denotar a esta cantidad a la que se denomina **número complejo**,

$$z = x + iy \ . \tag{1.8}$$

A x e y se las denomina parte real e imaginaria de z,

$$x = \Re e\,(z) \ , \qquad y = \Im m\,(z) \ ,$$

mientras que a i se la llama **unidad imaginaria**. Se denomina **complejo conjugado** de z al número $\bar{z} = x - iy$. Si $z = iy$, se dice que se trata de un número imaginario puro. Es inmediato comprobar que la ley de multiplicación (1.3) se deduce de (1.7) y (1.8).

Se puede verificar fácilmente que los números complejos satisfacen los axiomas de cuerpo. De hecho, la adición de números complejos es conmutativa y asociativa,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \ , \qquad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \ ,$$

así como también el producto,

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \ , \qquad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \ ,$$

que también satisface la ley distributiva respecto de la suma,

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \ .$$

Los elementos neutros de la suma y la multiplicación son, respectivamente, $z = 0$ y $z = 1$. Si $z \neq 0$, existen los números complejos inversos frente a la suma, $-z$, y la multiplicación, z^{-1}. Notar que $i^{-1} = -i$. Al **cuerpo de los números complejos** se lo denota $\mathbb{C}$.

Cuando se quiere poner de relieve la interpretación geométrica, se dice que $\mathbb{C}$ es el **plano complejo**. A los puntos que se encuentran sobre el eje x se los identifica con los números reales, mientras que a los imaginarios puros se los identifica con los puntos del eje y. Por ello se les denomina eje real y eje imaginario.

1.2 Forma polar de los números complejos

Es interesante expresar a z por medio de las coordenadas polares del plano,

$$x = r\cos\theta \ , \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \ , \qquad 0 \le r < \infty \ , \quad 0 \le \theta < 2\pi \ . \tag{1.9}$$

Se denomina **módulo** o valor absoluto de z, y se denota por $|z|$, a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, mientras que $\theta = \arctan y/x$ es la **fase** o **argumento** de z y se denota a veces como $\arg z$. El primero no es más que la distancia euclídea entre el punto del plano que corresponde a z y el origen de coordenadas. De esta forma, $z_1 - z_2$ es la distancia euclídea entre los puntos de $\mathbb{R}^2$ que representan z_1 y z_2. Por otra parte,

$$|z|^2 = z\bar{z} = r^2 \ . \tag{1.10}$$

Substituyendo (1.9) en (1.8) obtenemos la **forma polar** de z,

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \ . \tag{1.11}$$

Dado que $\bar{z} = r(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, concluimos que la conjugación es equivalente al cambio $\theta \to -\theta$.

1.3 Fórmula de De Moivre

Si tomamos dos números complejos expresados en su forma polar, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$, es inmediato ver que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)] \ ;$$

al multiplicar dos números complejos sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman. Si $z_2 \neq 0$, es fácil comprobar que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)] \ ;$$

al dividirlos, sus módulos se dividen y sus argumentos se restan. Estas fórmulas se generalizan de inmediato: si $z_i = r_i(\cos\theta_i + i\,\mathrm{sen}\,\theta_i)$,

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \cdots + \theta_n)] \ . \tag{1.12}$$

En el caso particular en que $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, la fórmula resultante se conoce como **fórmula de De Moivre**,

$$z^n = r^n [\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta] \ , \tag{1.13}$$

ya que fue obtenida por Abraham de Moivre en el siglo XVII, un matemático que fue admirado por su amigo Isaac Newton.

1.4 Raíces de números complejos

Un número $w \in \mathbb{C}$ se dice que es una raíz n–ésima de z, $n \in \mathbb{N}$, si $w^n = z$. En este caso, se escribe

$$w = z^{1/n} \ .$$

Utilizando la fórmula de De Moivre, puede demostrarse que si $z \neq 0$ existen n raíces n–ésimas de z,

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ . \tag{1.14}$$

Verificarlo es trivial, $(z^{1/n})^n = z$. Si $k = n$, resulta la misma solución que para $k = 0$. En general, se obtienen soluciones distintas para valores de k distintos, módulo n, lo que hace posible restringir el intervalo de k sin pérdida de generalidad.

Se llaman raíces n–simas de la unidad a las n soluciones de la ecuación

$$z^n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

Si denotamos por

$$w := \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \ ,$$

las n raíces son 1, w, w^2, …, w^{n-1}. Geométricamente, éstas representan n vértices de un polígono regular de n lados inscritos en una circunferencia de radio unidad y con centro en el origen de coordenadas. Ejemplo, $z^4 = 1$ conduce a 1, i, -1 y $-i$.

1.5 Forma exponencial de los números complejos

Recordemos que la función exponencial de una variable real, e^x, se puede desarrollar en serie de Taylor,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ .$$

Si aplicamos el mismo desarrollo cuando $x = i\theta$, obtenemos

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ ;$$

es decir, la **fórmula de Euler** (1748),

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \ . \tag{1.15}$$

Dado que hemos aplicado una serie de Taylor a una variable compleja, debemos tomar este resultado como una definición. La **representación polar** de z adquiere una forma muy sencilla,

$$z = re^{i\theta} \ . \tag{1.16}$$

La conjugación compleja consiste en un cambio de signo en el exponente, $\bar{z} = re^{-i\theta}$, y el teorema de De Moivre es trivial en esta representación,

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)} \ ,$$

si la exponencial compleja tiene las mismas propiedades de multiplicación que la real. En particular, esto significa que si $z \neq 0$,

$$z^{-1} = r^{-1} e^{-i\theta} \ . \tag{1.17}$$

Las raíces n–simas de la unidad en términos de exponenciales complejas son, simplemente,

$$z_k = e^{i2k\pi/n} \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

En el ejemplo anterior, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ y $e^{i3\pi/2} = -i$.

1.6 Topología del plano complejo

Es posible introducir en $\mathbb{C}$ una topología que es, precisamente, la que se obtiene de interpretarlo como $\mathbb{R}^2$. Ya hemos indicado que la distancia euclídea entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$ correspondientes a z_1 y z_2 es $|z_1 - z_2$. Por lo tanto, el módulo de z satisface la desigualdad triangular,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \ .$$

También se cumple que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Con esta identificación del módulo, todos los conceptos que aparecen en $\mathbb{R}^2$ se trasladan sin más a $\mathbb{C}$. Así, por ejemplo, una bola abierta de radio $R \in \mathbb{R}^+$ y con centro en $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{B}(z; R)$, está dada por

$$\mathcal{B}(z; R) = \{w \in \mathbb{C}, \text{tal que}\, |w - z| < R\} \ .$$

Geométricamente, $\mathcal{B}(z; R)$ representa un disco circular de radio R centrado en el punto z. Análogamente a como se hace en $\mathbb{R}^2$, podemos definir conjuntos abiertos, cerrados, acotados, conexos y compactos. En particular, son válidos los teoremas de Bolzano-Weierstrass (cada sucesión acotada tiene una sub-sucesión convergente) y Heine-Borel (si un conjunto $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ tiene alguna de las siguientes propiedades, entonces tiene las otras dos: (i) $\mathcal{E}$ es cerrado y acotado, (ii) $\mathcal{E}$ es compacto y (iii) todo subconjunto infinito de $\mathcal{E}$ tiene un punto de acumulación en $\mathcal{E}$). Esto permite demostrar que toda sucesión de Cauchy (una sucesión tal que para cualquier distancia dada siempre se puede encontrar un término de la sucesión tal que la distancia entre todo par de términos posteriores es menor que la dada) en $\mathbb{C}$ (cuya definición es la que se sigue de la definición más general en espacios métricos) es convergente; es decir que $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo.

A lo largo del curso utilizaremos la denominación de **región** para referirnos a un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. También se denomina **dominios** a estos conjuntos.